

Estudio de las frecuencias en una cuerda de guitarra

Música, matemática y física

Pablo Adrián Nuñez
Instituto San José de Morón, pablo_nuniez2000@yahoo.com.ar

RESUMEN

En este trabajo se realiza el estudio de la relación entre la frecuencia y la longitud en la cuerda de una guitarra. Para ello se realiza la comparación experimental con la relación matemática de las frecuencias de los semitonos en la escala temperada para una cuerda de guitarra criolla. Las mediciones obtenidas permitieron comprobar dicha relación dentro del error experimental.

INTRODUCCIÓN

Una cuerda fija en ambos extremos es pulsada, a lo largo de la cuerda viajan vibraciones transversales; estas perturbaciones rebotan en los extremos fijos, y se forma un patrón de onda estacionaria. Los modos naturales de vibración de la cuerda son excitados, y estas vibraciones dan origen a las ondas longitudinales en el aire del entorno, el cual los transmite a nuestros oídos en forma de sonido musical.¹

Una cuerda fija que se halle fija en ambos extremos, puede resonar a frecuencias dadas por

$$f_n = n \frac{v}{2L} \quad (1)$$

Aquí v es la velocidad de propagación en la cuerda y puede obtenerse de la expresión

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (2)$$

Donde T es la tensión a la que se halla sometida la cuerda y μ es la densidad lineal de la cuerda es decir la masa por unidad de longitud.

El sonido que emite un instrumento musical está caracterizado por la altura, el timbre y la intensidad.

Vale señalar que la altura está relacionada con la frecuencia fundamental del sonido. Desde el punto de vista musical, la sensación primaria asociada es el tono: cada nota musical corresponde a una frecuencia determinada. Actualmente la escala musical más utilizada en el mundo occidental es la *escala temperada*. La misma está definida por la siguiente relación²

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = 2^{\frac{1}{12}} = 1.05946 \quad (3)$$

la que indica que entre dos notas consecutivas (semitono) hay un factor constante igual a 1,05946, y que cada doce semitonos se duplica la frecuencia, pasando de esta manera a la octava siguiente.

De las expresiones (1) y (2) puede obtenerse la relación:

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (4)$$

Puede observarse que la frecuencia aumenta cuando la masa por unidad de longitud es menor. El otro aporte importante lo hace la longitud de la cuerda, ya que está en relación inversamente proporcional respecto de la frecuencia.

La variación de L está dada para una misma cuerda por el uso de los trastes donde se fija el dedo correspondiente. La posición de los trastes responde a la relación siguiente

$$L_i = \frac{L}{1.05946} \quad (5)$$

Esta es el resultado de relacionar las expresiones de la frecuencia para dos notas de la misma cuerda.

El objetivo será corroborar experimentalmente la relación (4) para la sexta cuerda de una guitarra criolla para lo cual se medirán las frecuencias para distintas longitudes.

MÉTODO EXPERIMENTAL

Se grabaron los sonidos mediante el empleo de la tarjeta de sonido de una PC. Luego mediante el empleo de soft se determinaron las frecuencias para las distintas longitudes de la sexta cuerda de una guitarra.

Las longitudes de cuerda fueron tomadas directamente con una cinta métrica para la cuerda libre y para los primeros doce trastes.

La tensión de la cuerda fue obtenida mediante la relación

$$T = \frac{mgl}{2h}$$

La misma surge del análisis estático de fuerzas en equilibrio para un cuerpo de masa m suspendido a mitad de la cuerda a estudiar.

Los valores de la masa, la longitud l y la altura h medidas fueron:

$$m = (0,2230 \pm 0,0001)kg \quad l = (0,323 \pm 0,001)m \quad h = (0,00470 \pm 0,00005)m$$

Con estos valores la tensión obtenida fue de:

$$T = (74,0 \pm 5,2)N$$

RESULTADOS

A continuación se presenta el gráfico de frecuencias obtenido.

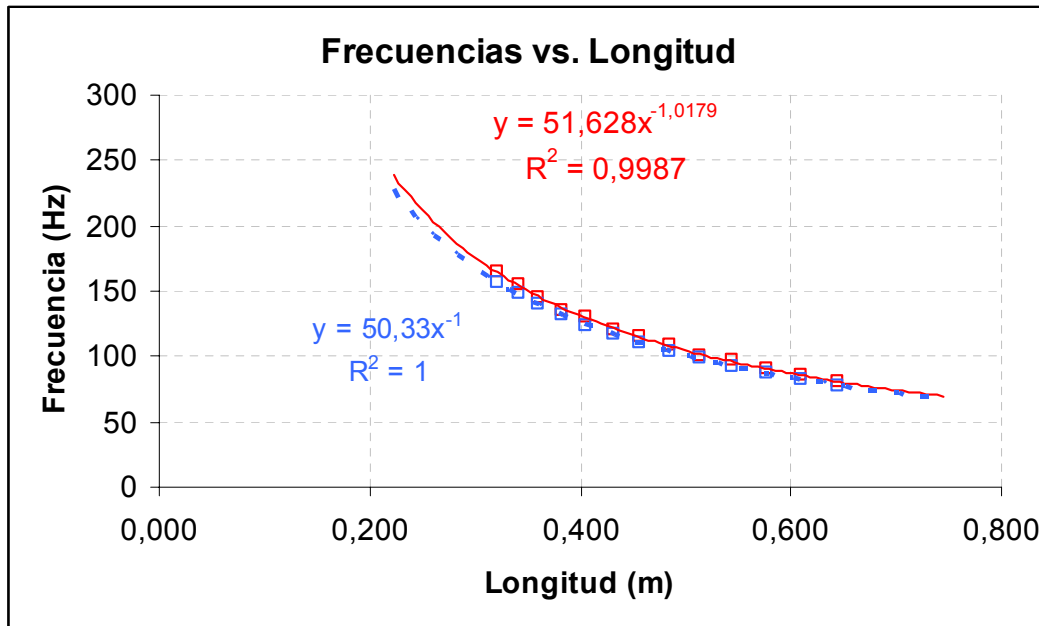


Gráfico 1. Este gráfico permite comparar la curva experimental con la teórica esperada para la frecuencia en función de la longitud de la cuerda. La curva experimental es la de color rojo y la teórica es la azul.

DISCUSIÓN

La curva experimental hallada se condice con la esperada. Puede verse también la similitud en sus ecuaciones respectivas.

Puede deberse ciertas diferencias halladas a las posiciones de los trastes ya que los valores medidos difieren para algunos de ellos de los valores teóricos según la expresión (5) (ver Tabla en ANEXO).

Un aspecto que puede introducir cierto error considerable es el proceso de medición de la altura para el cálculo de la tensión. Puede verse según la medición física que el error experimental introducido es de un 7%.

Otro factor a tener en cuenta es que se ha tomado como masa lineal de la sexta cuerda un valor propuesto en un trabajo publicado³.

CONCLUSIONES.

Según los datos obtenidos y los resultados hallados pudo comprobarse la relación matemática propuesta para la escala temperada respecto de las frecuencias.

Si observamos la tabla del ANEXO también puede corroborarse una buena aproximación respecto de la progresión geométrica tanto de las frecuencias para los distintos semitonos como de las respectivas posiciones de los trastes.

De dicha tabla puede verificarse además la aproximación respecto de la relación de frecuencia de las octavas consecutivas donde su frecuencia es el doble de la anterior.

REFERENCIAS

1. ROBERT RESNICK, DAVID HALLIDAY, KENNETH KRANE. Física Vol. 1. México 1997. Cap. 20 págs. 504-506.
2. BEATRIZ FOLLARI, MARÍA TERESA PERROTTA, GILDA DIMA, ELENA GUTIERREZ, ANA MARÍA DE LA FUENTE, VICENTE CAPUANO. “Una propuesta experimental para el estudio de cuerdas vibrantes”.
3. MICHAEL C. LOPRESTO, “Experimenting with guitar strings”, The Physics Teacher, Vol. 44, November 2006.

ANEXO

Tabla 1. Comparación de resultados experimentales con teóricos esperados.

| Longitud experimental (m) | Frecuencia Experimental (Hz) | Razón Frec n vs Fundam | Razón entre Fn-1 y Fn | Razón entre Ln y Ln-1 | Lteórico(m) | Frecuencia Teórica (Hz) | Razón Frec n vs Fundam | Razón entre Fn y Fn-1 | Razón entre Ln y Ln-1 |
|---------------------------|------------------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-------------|-------------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0,645 | 80,54 | 1,00 | - | - | 0,645 | 78,03 | 1,00 | - | - |
| 0,610 | 85,78 | 1,07 | 1,065 | 1,057 | 0,609 | 82,51 | 1,06 | 1,057 | 1,059 |
| 0,577 | 90,05 | 1,12 | 1,050 | 1,057 | 0,575 | 87,23 | 1,12 | 1,057 | 1,059 |
| 0,545 | 96,99 | 1,20 | 1,077 | 1,059 | 0,543 | 92,35 | 1,18 | 1,059 | 1,059 |
| 0,513 | 100,28 | 1,25 | 1,034 | 1,062 | 0,513 | 98,11 | 1,26 | 1,062 | 1,059 |
| 0,485 | 108,95 | 1,35 | 1,086 | 1,058 | 0,484 | 103,77 | 1,33 | 1,058 | 1,059 |
| 0,457 | 114,86 | 1,43 | 1,054 | 1,061 | 0,457 | 110,13 | 1,41 | 1,061 | 1,059 |
| 0,431 | 120,22 | 1,49 | 1,047 | 1,060 | 0,432 | 116,77 | 1,50 | 1,060 | 1,059 |
| 0,406 | 129,66 | 1,61 | 1,079 | 1,062 | 0,408 | 123,97 | 1,59 | 1,062 | 1,059 |
| 0,383 | 135,81 | 1,69 | 1,047 | 1,060 | 0,385 | 131,41 | 1,68 | 1,060 | 1,059 |
| 0,361 | 145,25 | 1,80 | 1,070 | 1,061 | 0,364 | 139,42 | 1,79 | 1,061 | 1,059 |
| 0,341 | 155,32 | 1,93 | 1,069 | 1,059 | 0,343 | 147,60 | 1,89 | 1,059 | 1,059 |
| 0,322 | 164,47 | 2,04 | 1,059 | 1,059 | 0,324 | 156,30 | 2,00 | 1,059 | 1,059 |